

文章编号:1673-9981(2010)02-0089-06

# 基于有限元法的正交各向异性板的屈曲分析\*

曲文斌, 吴剑国, 单鲁阳

(浙江工业大学建筑工程学院, 浙江 杭州 310014)

**摘要:**利用有限元软件 Patran-Marc 模拟在各种边界条件和荷载作用下正交各向异性板的屈曲失稳形式,研究了不同的边界条件和受力情况对板的屈曲的影响,得到了正交各向异性板屈曲的一般规律.分析了 FRP 复合材料构件的局部屈曲,并与相应的正交各向异性板的屈曲进行对比,阐述了正交各向异性板的屈曲理论在构件中应用的特点.分析结果对 FRP 复合材料构件在轴压以及复合受力作用下的稳定性设计具有一定的参考价值.

**关键词:**正交各向异性板; 屈曲; 特征值

**中图分类号:** TB332

**文献标识码:** A

FRP(Fiber Reinforced Plastic)复合材料<sup>[1]</sup>是一种高强轻质,低能耗的建筑新材料,具有耐蚀性和抗疲劳性等优异性能,可取代部分传统建筑材料,应用于土木工程中<sup>[2]</sup>,因此,对 FRP 复合材料的各种性能的研究非常有必要,本文主要对正交各向异性板在各种边界条件和荷载形式下的屈曲稳定性分析,总结正交各向异性板屈曲的一般规律.

目前,对正交各向异性材料板的屈曲的研究还不充分,国内学者主要是针对理想的边界条件和简单荷载形式进行分析,国外学者所做的相关研究主要包括:承受侧向均布荷载的四边简支板和特殊边界条件下承受纯剪作用的屈曲特征值理论研究<sup>[3-4]</sup>.

本文应用有限元分析软件 Patran-Marc 对正交各向异性板在不同边界条件下的失稳临界状态进行研究:在已有的理论验证基础上,进一步分析在不同边界条件下复杂受力状态的板的特征值屈曲、非线性屈曲,计算 T 型、工字型和箱型截面 FRP 柱子的屈曲特征值,并与相应尺寸的板的屈曲进行对比,得到 FRP 板屈曲的一般规律和特点.

## 1 正交各向异性板屈曲理论分析

板在承受非均匀线性轴向线荷载时的计算模型如图 1 所示.

由能量法和变分原理可以推导出 FRP 板在不同边界条件下,双向轴压荷载下的屈曲特征值.

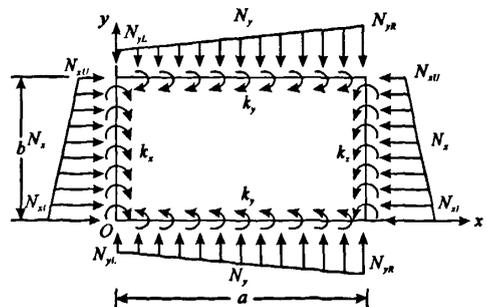


图 1 正交各向异性板的面内线性荷载计算模型

Fig. 1 The model of orthotropic plate under the in-plane linear load

为了说明边界条件的一般性,将板的四边,在图

收稿日期:2010-03-12

\* 基金项目:国家自然科学基金项目(E080504)

作者简介:曲文斌(1984—),男,山东潍坊人,硕士研究生.

1 所示的坐标系中,  $x=0, x=a$  和  $y=0, y=b$  的转动约束刚度系数分别设为  $k_x$  和  $k_y$ , 通过改变此系数的值来确定不同的边界条件. 当结构处于平衡状态时, 由最小势能原理得:

$$\delta \Pi = \delta U_e + \delta U_r - \delta V_e = 0 \quad (1)$$

式(1)中,  $U_e$  为弹性应变能的一阶变分,  $U_r$  为存储在板中的应变能,  $V_e$  为外力所做的功:

$$U_e = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \{ D_{11} w_{,xx}^2 + D_{22} w_{,yy}^2 + 2D_{12} w_{,xx} w_{,yy} + 4D_{66} w_{,xy}^2 \} dx dy, \quad (2)$$

$$U_r = \frac{1}{2} \int_0^a k_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^a k_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=b} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^b k_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^b k_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=a} \right)^2 dy, \quad (3)$$

$$V_e = \frac{1}{2} N_{xz} \iint_{\Omega} \left\{ 1 - \eta_x \frac{y}{b} \right\} w_{,x}^2 dx dy + \frac{1}{2} N_{yx} \iint_{\Omega} \left\{ 1 - \eta_y \frac{x}{a} \right\} w_{,y}^2 dx dy. \quad (4)$$

式(2)~(4)中,  $D$  为板的刚度,  $a$  为板的长边,  $b$  为板的短边.  $w$  为 FRP 板在轴向荷载作用下的变形函数.

$$w(x, y) = \left[ (1 - w_1) \sin \frac{\pi x}{a} + w_1 (1 - \cos \frac{2\pi x}{a}) \right] \left[ (1 - w_2) \sin \frac{\pi y}{b} + w_2 (1 - \cos \frac{2\pi y}{b}) \right] \quad (5)$$

式(5)中,

$$w_1 = \frac{k_x a}{k_x a + 4\pi D_{11}}, \quad (6)$$

$$w_2 = \frac{k_y b}{k_y b + 4\pi D_{22}}. \quad (7)$$

$\eta_x$  和  $\eta_y$  是荷载系数

$$\eta_x = \frac{N_{xx} - N_{xx}^0}{N_{xx}}, \quad (8)$$

$$\eta_y = \frac{N_{yy} - N_{yy}^0}{N_{yy}}. \quad (9)$$

当  $k_x$  和  $k_y$  都是正值,  $k_x = k_y = 0$  时, 对应的边界条件为简支;  $k_x = k_y = \infty$  时, 对应的边界条件为固支, 把上述公式带入式(1)中就可得到不同边界条件下, 模型板在双向轴压时的屈曲特征值.

在单向轴压荷载作用时, 特殊边界条件下正交各向异性板的屈曲特征值计算如下:

(1) 两短边和一长边简支, 另一长边固支

$$N_x = \frac{12D_{66}}{b^2} + \frac{\pi^2 D_{11}}{a^2} \quad (10)$$

(2) 两短边简支, 一长边固支另一长边自由<sup>[5]</sup>

$$N_x = \frac{\pi^2 [3.125\sqrt{D_{11}D_{22}} + 2.33(D_{12} + 2D_{66})]}{b^2} \quad (11)$$

(3) 四边简支

$$N_x = \frac{2\pi^2}{b^2} (\sqrt{D_{11}D_{22}} + D_{12} + 2D_{66}) \quad (12)$$

(4) 两长边固支两短边简支

$$N_x = \frac{\pi^2 [4.53\sqrt{D_{11}D_{22}} + 2.62(D_{12} + 2D_{66})]}{b^2} \quad (13)$$

## 2 正交各向异性板屈曲有限元验证

用有限元分析软件 Patran-Marc<sup>[6]</sup> 对承受单向轴压荷载的正交各向异性板的屈曲进行分析. 整个分析过程围绕材料的弹性阶段展开, 在考虑材料各向异性以及各种边界条件的基础上, 采用有限元方法进行分析计算. 先进行屈曲的特征值分析, 得到其屈曲特征值, 并将结果与理论公式的计算结果对比. 然后再采用 Marc 弧长法<sup>[7]</sup> 进行非线性分析, 求得轴向非线性屈曲荷载. 试验材料的参数列于表 1.

在有限元模型中, 运用 Thin shell 矩形板单元对模型进行模拟离散, FRP 板的厚度为 0.64 cm, 加载边都在板的短边, FRP 板在不同边界条件下的屈曲荷载列于表 2.

表 1 材料参数

Table 1 Material parameter

| $E_x$                | $E_y$                | $E_z$                | $G_{xy}$             | $G_{yz}$             | $G_{xz}$             | $\gamma_{xy}$ | $\gamma_{yz}$ | $\gamma_{xz}$ |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------|---------------|---------------|
| $/(N \cdot cm^{-2})$ |               |               |               |
| $4.5603 \times 10^4$ | $2.1574 \times 10^4$ | $2.1574 \times 10^4$ | $7.3728 \times 10^5$ | $1.9231 \times 10^5$ | $7.3728 \times 10^5$ | 0.4           | 0.3           | 0.4           |

表 2 不同边界条件下 FRP 板的屈曲荷载对比  
Table 2 Comparison of FRP plate buckling load under different boundary conditions

| 模型板尺寸<br>/cm | 三边简支/(N·cm <sup>-1</sup> ) |              |             | 一边固支两加载边简支/(N·cm <sup>-1</sup> ) |              |             |
|--------------|----------------------------|--------------|-------------|----------------------------------|--------------|-------------|
|              | 特征值<br>(理论值)               | 特征值<br>(FEM) | 非线性极限<br>载荷 | 特征值<br>(理论值)                     | 特征值<br>(FEM) | 非线性极限<br>载荷 |
| 30.48×15.24  | 1975.82                    | 2056.47      | 1638.55     | 3325.72                          | 3493.27      | 2464.49     |
| 45.72×15.24  | 1340.34                    | 1506.03      | 1371.79     | 3325.72                          | 4325.25      | 3000.91     |
| 60.96×15.24  | 1117.87                    | 1366.19      | 804.64      | 3325.72                          | 4330.53      | 3252.85     |
| 模型板尺寸<br>/cm | 四边简支/(N·cm <sup>-1</sup> ) |              |             | 两长边固定两短边简支/(N·cm <sup>-1</sup> ) |              |             |
|              | 特征值<br>(理论值)               | 特征值<br>(FEM) | 非线性极限<br>载荷 | 特征值<br>(理论值)                     | 特征值<br>(FEM) | 非线性极限<br>载荷 |
| 30.48×15.24  | 10760.23                   | 11243.67     | 11347.23    | 20109.47                         | 23609.84     | 18087.02    |
| 45.72×15.24  | 10760.23                   | 11471.27     | 11392.03    | 20109.47                         | 25645.07     | 20232.37    |
| 60.96×15.24  | 10760.23                   | 11814.25     | 11483.78    | 20109.47                         | 26123.22     | 22529.55    |

由表 2 可见,用有限元软件计算得出的线性屈曲特征值比理论值大,非线性极限荷载比有限元软件计算得出的线性屈曲特征值偏小.这主要是由于在理论公式推导中的假设和简化所导致的,非线性计算结果更趋近于实际情况.在理论公式中,除三边简支的情况外,屈曲特征值的计算与长边的尺寸无关,但在有限元计算中发现,在一边固支两加载边简支和四边简支的情况下,板的屈曲特征值均随板的长边尺寸的增加而增大,即长边的约束作用不能忽略.对上述边界条件而言,在两短边简支两长边固支时的屈曲特征值最大,四边简支次之,屈曲特征值最小的是三边简支的形式,说明三边简支是不稳定的

边界形式,在实际工程应用中应加以避免.

### 3 正交各向异性板在其他荷载作用下的屈曲分析

#### 3.1 纯剪切作用下的屈曲

目前,对正交各向异性板在纯剪切作用下的屈曲分析,理论研究还很不足,仅有四边简支边界条件下的研究,本文采用有限元法对 FRP 板在不同边界条件下受纯剪切作用的屈曲进行了分析,结果列于表 3.

表 3 承受纯剪切作用时 FRP 板在不同边界条件的屈曲荷载  
Table 3 Buckling load of FRP plate with different boundary conditions under pure shear load

| 模型板尺寸<br>/cm     | 屈曲荷载/(N·cm <sup>-1</sup> ) |            |           |            |
|------------------|----------------------------|------------|-----------|------------|
|                  | 三边简支                       | 一边固支两加载边简支 | 四边简支      | 两长边固定两短边简支 |
| 30.48×15.24×0.64 | 3253.25                    | 5601.13    | 15818.36  | 23080.12   |
| 30.48×15.24×1.28 | 17332.89                   | 22399.36   | 127000.65 | 184300.47  |
| 45.72×15.24×0.64 | 1828.36                    | 4671.48    | 13963.45  | 21967.28   |
| 45.72×15.24×1.28 | 13217.15                   | 37365.18   | 119547.82 | 183600.52  |
| 60.96×15.24×0.64 | 1411.34                    | 4303.28    | 13837.58  | 20298.66   |
| 60.96×15.24×1.28 | 11067.31                   | 17211.69   | 111000.37 | 119300.82  |

由表3可见,正交各向异性板的屈曲荷载对边界条件非常敏感.在受剪切作用时,板的厚度越大,其屈曲荷载也越大,这主要是由于板的厚度增加了板的刚度也增加了.一边固支两加载边简支与三边简支的情况类似,长边越长,屈曲荷载越小.

### 3.2 弯曲应力作用下的屈曲

由于正交各向异性板与一般的各向同性材料构

件不同,其屈曲对边界条件非常敏感,所以在承受弯曲应力时材料屈曲的理论计算公式推导比较复杂,多边界条件下,正交各向异性板承受弯曲应力时,计算屈曲的公式还不完备.采用有限元法模拟在弯曲应力作用下,不同边界条件下模型板的屈曲特征值列于表4.

表4 承受弯曲应力作用时FRP板在不同边界条件下的屈曲特征值

Table 4 Buckling load of FRP plate with different boundary conditions under bending stress

| 板的尺寸/cm          | 屈曲特征值/(N·cm <sup>-1</sup> ) |            |          |            |
|------------------|-----------------------------|------------|----------|------------|
|                  | 三边简支                        | 一边固支两加载边简支 | 四边简支     | 两长边固支两短边简支 |
| 30.48×15.24×0.64 | 3018.72                     | 4549.60    | 57872.30 | 39398.45   |
| 45.72×15.24×0.64 | 2335.61                     | 6125.18    | 62240.39 | 39385.72   |
| 60.96×15.24×0.64 | 2157.07                     | 6262.42    | 63198.45 | 39386.03   |

由表4可见,两长边固支两短边简支的板在弯曲应力作用下,其屈曲特征值无论长边是否增长都不会改变,说明在这种边界条件下,板的屈曲与长边的尺寸无关,这是由于固支的边界条件提供的约束刚度比较大,限制了其长度方向的移动,从而影响了板的屈曲特征值.在弯曲应力作用下,四边简支边界条件下的屈曲荷载最大,三边简支边界条件下的屈曲荷载最小,说明在承受弯曲应力荷载条件下,对上述边界条

件而言,四边简支板更具稳定性.

### 3.3 复合受力作用下的屈曲

实际应用中,构件除承受轴向均布荷载和纯剪切作用外,还会受到两种或两种以上荷载的共同作用.本文模拟的复合受力是剪切与弯曲应力的共同作用,对正交各向异性板在这种复合力作用下的屈曲,进行了4类边界条件的模拟计算,结果列于表5.

表5 复合受力条件下板在不同边界条件下的屈曲特征值

Table 5 Buckling eigenvalue of orthotropic plate with different boundary conditions under composite load

| 模板尺寸/cm          | 屈曲特征值/(N·cm <sup>-1</sup> ) |            |         |            |
|------------------|-----------------------------|------------|---------|------------|
|                  | 三边简支                        | 一边固支两加载边简支 | 四边简支    | 两长边固支两短边简支 |
| 30.48×15.24×0.64 | 390.92                      | 586.91     | 6518.01 | 4336.28    |
| 45.72×15.24×0.64 | 300.22                      | 778.89     | 6405.12 | 4331.69    |
| 60.96×15.24×0.64 | 306.83                      | 785.68     | 11760.2 | 4331.43    |

由表5可见,模板在复合受力下的屈曲特征值相对于单向轴压作用、纯剪切作用以及弯曲应力作用而言要低,这说明对正交各向异性板的屈曲而言,复合受力是很不利的受力形式.在三边简支情况下,屈曲特征值是随长边尺寸的增加而降低的.在两长边固支两短边简支的情况下,屈曲特征值不随长边尺寸的改变而改变.在四边简支的情况下,在复合力

的作用下,屈曲特征值随长边尺寸的增加而减小,这与只承受弯曲作用力时的情况相反.

## 4 构件中正交各向异性板的屈曲

为进一步分析板的屈曲,对边界条件为两端简支,承受轴向线性均布压力的FRP复合材料的工字

型、T型和箱型截面柱子的局部屈曲,以及构件发生局部屈曲的部位和屈曲荷载情况进行了分析。

T型截面柱的尺寸为 $15.24\text{ cm} \times 15.24\text{ cm} \times 0.64\text{ cm}$ ,高度 $45.72\text{ cm}$ 。分析结果表明,T型截面柱的腹板首先局部屈曲。在相同的受力条件下,单独对发生屈曲的腹板进行分析,边界条件为两短边简支,长边一端固定,另一端自由。对比表明,腹板的屈曲特征值比构件局部屈曲荷载值大。

工字型截面柱的尺寸为 $45.72\text{ cm} \times 15.24\text{ cm} \times 0.64\text{ cm}$ ,高度 $45.72\text{ cm}$ ,分析结果表明,柱子的翼缘发生局部屈曲,有两个屈曲波,其屈曲特征值为 $6181.39\text{ N/cm}$ 。对发生局部屈曲的翼缘板( $45.72\text{ cm} \times 7.62\text{ cm} \times 0.64\text{ cm}$ )单独进行分析,边界条件为两端简支,一长边固定,其屈曲特征值为 $6587.79\text{ N/cm}$ ,只有一个屈曲波,与板在工字型柱中的屈曲波形不同。

正方形截面箱型柱的截面尺寸为: $15.24\text{ cm} \times 15.24\text{ cm} \times 0.64\text{ cm}$ ,高度 $45.72\text{ cm}$ 。其局部屈曲特征值为 $10522.36\text{ N/cm}$ ,屈曲波形为4个,由于箱型截面是完全对称的,故对单独板的屈曲研究可取任一腹板,经有限元分析得到其屈曲特征值为 $15776.51\text{ N/cm}$ ,屈曲波形为一个。各构件与板的屈曲特征值列于表6。

表6 构件中局部屈曲与板的屈曲特征值对比

Table 6 Comparison of the buckling loads between local buckling component and the plate

| 截面形状 | 屈曲特征值/( $\text{N} \cdot \text{cm}^{-1}$ ) |          |
|------|---|----------|
|      | 构件局部                                      | 构件中的板    |
| T型   | 1028.87                                   | 1157.57  |
| 工字型  | 6181.39                                   | 6587.79  |
| 箱型   | 10522.36                                  | 15776.51 |

由表6可见,发生局部屈曲的构件的屈曲特征值比单独的正交各向异性板的小,箱型截面的构件与构件中发生局部屈曲的板的屈曲特征值相差最大,工字型的相差最小。这可归结为:腹板对翼缘板没有起到完全的嵌固作用,而在分析单独的翼缘板时,是在两端固定的理想边界条件下进行的,所以得到的屈曲特征值比柱子的要大。另外,板的边界条件

的转动约束刚度远比柱子的大,所以两者的屈曲波形不同。

## 5 结 论

(1)由于理论公式中各种假设的存在,有限元计算得到的线性屈曲特征值比理论计算值大,有限元模拟的边界条件更趋近于实际情况。

(2)正交各向异性材料板的屈曲不仅受加载边的影响,由于约束刚度的客观存在,其屈曲结果受非加载边的影响也不能忽略,因此,理论计算公式具有不完备性。

(3)正交各向异性板在不同的荷载形式下的屈曲规律有差异,其中承受复合受力情况下屈曲特征值明显比单一受力要小,在所研究的受力形式中,复合受力是最不利的受力形式。

(4)在承受弯曲应力作用时,四边简支是最稳定的边界形式,而在其他荷载作用时,两边固支两边简支是相对比较稳定的边界形式。

(5)考虑实际结构的约束情况,FRP板构件的局部屈曲特征值比相同尺寸的FRP板的屈曲特征值小。

### 参考文献:

- [1] 于清. FRP的特点及其在土木工程中的应用[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 2000, 33(6): 26-30.
- [2] 王川, 张志春, 周智, 等. FRP材料在土木工程制品中的应用研究[J]. 纤维复合材料, 2006(2): 35-40.
- [3] SHAN Lu-yang. Explicit buckling analysis of buckling analysis of fiber-reinforce plate(FRP) composite structures[D]. Washington: Washington State University, 2007.
- [4] LASZIO P K. Local buckling of fiber reinforce plastic composite structural members with open and closed cross section [J]. Journal of Structural Engineering, 2003, 129(11): 1503-1513.
- [5] EVER J, BARBERO, PH D. Introduction to composite materials design[M]. USA: Taylor & Francis, 1998.
- [6] 陈火红, 祁鹏. Msc. Patran/Marc 培训教程和实例[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [7] 丁皓然. 弹性力学和塑性有限元分析法[M]. 北京: 机械工业出版社, 1989.

## Buckling analysis of orthotropic plate by finite element method

QU Wen-bin, WU Jian-guo, SHAN Lu-yang

*(College of Civil Engineering and Architecture, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China)*

**Abstract:** A buckling analysis of orthotropic plate under different boundary conditions and different force types was simulated using Patran-Marc finite element software. The stability principle of orthotropic plate under axial compression was obtained by analysing a series of numerical models with different boundary conditions. A local buckling of composite materials was investigated and the local buckling load between the orthotropic plate and fiber reinforced plastic component was compared, also the application characteristic of orthotropic plate buckling theory in components of FRP composite materials was expounded. The conclusion with the local buckling provided a base for design of the local buckling under the axial load for fiber reinforced plastic plate.

**Key words:** orthotropic plate; buckling; eigenvalue