文章编号：1003-7837(2006)01-0059-03

基于罚函数法和前期本构模型的刚粘塑性 FEM 求解列式的推导

李　勇，朱应禄

（江西理工大学 材料与化学工程学院，江西 赣州　341000）

摘　要：对四种牌号的 Al 合金(LF6，LC4，LD5，LY12)的高温塑性变形拟合出的本构方程进行整理，并采用罚函数法和前期模型，推导出刚粘塑性有限元法的求解列式. 此列式将是后期数值模拟的出发点.

关键词：罚函数法；本构模型；刚粘塑性；有限元

中图分类号：O241.82　　**文献标识码**：A

长期以来，人们利用试验、经验数据、图表等进行金属成型的工艺设计. 产品设计精度不高，并且设计周期长. 自从 1973 年有限元法(FEM—Finite Element Method)首次应用于金属塑性加工领域以来，有限元法作为固体力学领域最有效率的数值分析方法，为各国学者所重视. 利用有限元法模拟金属的塑性流动规律、工件的变形和模具充填情况等，使人们在加工之前就能预知其变形特点，由此可以大大缩短产品的设计周期，节省试验费用，还可以在计算机上进行模拟试验. 刚粘塑性 FEM 法即是求解材料在高温下塑性变形问题的有限元法. 材料在高温下的变形呈现速度敏感性，即材料的流动应力 σ 与变形程度 ε 有关. 这也是它与刚塑性材料的最大区别.

1　刚粘塑性材料基础

刚粘塑性材料的流动应力 σ 与变形温度 T、变形程度 ε、变形速率 $\dot{\varepsilon}$ 及材料性质参数 S 均有关系. 其本构模型的一般表达式为：

$$\sigma=\sigma(\varepsilon,\dot{\varepsilon},T,S). \tag{1}$$

1.1　前人提出的几种本构模型

(1)Perzyra 的过应力模型[1-2]

$$\sigma=Y\left[1+\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\gamma}\right)^{h}\right], \tag{2}$$

式中：Y—静态屈服应力，γ—粘性系数，h—材料常数. 此模型适用于各种温度下的高速成型过程分析.

(2)Backofen 拟粘塑性模型[3]

$$\sigma=c\cdot(\dot{\varepsilon})^{h}, \tag{3}$$

式中：c，h 均为材料常数.

(3)Rosserd 模型[4]

$$\sigma=b(\dot{\varepsilon})^{h}(\varepsilon)^{l}, \tag{4}$$

式中：b，h，l 均为材料常数. 此模型适用于室温下及再结晶温度下的成型过程分析.

(4)$\sigma=\sigma_0 K_l K_\varepsilon K_{\dot{\varepsilon}}$ 模型　　(5)

式中：K_l，K_ε，$K_{\dot{\varepsilon}}$ 分别为 T，ε，$\dot{\varepsilon}$ 对 σ 的影响系数.

(5)幂函数模型

$$\sigma=\alpha\cdot(\varepsilon)^{l}(\dot{\varepsilon})^{h}e^{-bT}, \tag{6}$$

式中：l，h 为材料常数；T 为绝对温度. 此模型的应用较为广泛.

上述模型中，(1)～(3)没有明显地给出流动应力 σ 与温度 T、变形程度 ε、变形速率 $\dot{\varepsilon}$ 的关系，并且(3)明显不适用于高温成型. 为此，在研究 LF6，LC4，LD5，LY12 的 Al 合金高温变形规律时，徐伟力[5]采用模型(4)拟合出如下的本构方程：

收稿日期：2005-08-23

作者简介：李勇(1976-)，男，山东临沂人，讲师，硕士.

$$\sigma=\sigma_0 e^{-\alpha_1 T+\alpha_2}\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{\alpha_3 T+\alpha_4}\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{\alpha_5 T+\alpha_6}, \tag{7}$$

式(7)中：$\alpha_1 \sim \alpha_6$ 为回归参数，$\varepsilon_0=0.3$，$\dot{\varepsilon}=0.1\ \mathrm{s}^{-1}$，$T_0=673$ K，$T=\frac{t+273}{T_0}$，σ_0 为基准应力. 此模型具有较高的精度[6].

1.2 前期模型的整理与评价

整理式(7)，有

$$\sigma=cf(T)\,\varepsilon^n(\dot{\varepsilon})^m, \tag{8}$$

其中：$c=\sigma_0 e^{\alpha_2}(\dot{\varepsilon}_0)^{-\alpha_4}(\varepsilon_0)^{-\alpha_6}$，

$f(T)=e^{-\alpha_1 T}(\dot{\varepsilon}_0)^{-\alpha_3 T}(\varepsilon_0)^{-\alpha_5 T}$，

$m=\alpha_3 T+\alpha_4$，

$n=\alpha_5 T+\alpha_6$.

由式(8)可看出：经整理，此本构模型具有了同模型(5)类似的形式. 它比较清楚地表达了 σ 与 T，ε，$\dot{\varepsilon}$ 等的关系，参数 n 和 m 可分别视为应变硬化指数和变形速率敏感指数，且 m，n 均与温度 T 有关. ε 和 T 对 σ 的影响具有交互作用，$\dot{\varepsilon}$ 和 T 对 σ 的影响也具有交互作用，这一点已为试验和理论所验证[6]. 整理成公式(8)形式的本构模型会对后续有限元求解列式的推导提供极大的方便.

2 罚函数法[7]

刚粘塑性法有限元的基础是 Markov 变分原理. 它认为：在实际求解具有体积不可压缩条件的变形体内部速度场时，要选择一个既满足速度边界条件，又满足体积不可压缩条件的速度场是很困难的，而仅满足速度边界条件的速度场则较容易找到. 因此，可以以某种方式将体积不可压缩条件引入泛函，形成一个新泛函，通过求解新泛函的驻值，就能在满足速度许可条件的容许速度场中寻求真实速度场. 为此，常采用罚函数法.

罚函数法用一个很大的正数与体积变化速率的平方相乘，将其作为“惩罚项”引入泛函中：

$$\prod=\int_v E(\dot{\varepsilon}_{ij})\,\mathrm{d}v-\int_{S_F} F_i u_i\,\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{2}\int_v(\dot{\varepsilon}_v)^2\,\mathrm{d}v, \tag{9}$$

当所求速度场接近真实速度场时，$\dot{\varepsilon}_v$ 接近于 0，上述泛函式(9)右端第三项亦趋于 0. 当速度场远离真实速度场时，惩罚项的值就很大，相当于对泛函违反约束条件进行了“惩罚”. 这样导致在迭代求解中前后两次的解差别很大，从而使得问题无法解决. 在对泛函求极小值(驻值)的过程中，速度场逐渐趋于真实解，“惩罚项”作用逐渐消失.

3 求解列式推导

3.1 泛函离散

泛函在整个变形体内成立，在单元也同样成立，则将其在求解域内离散，对于第 m 个单元有：

$$\prod{}^e=\int_{V_m} E(\dot{\varepsilon}_{ij})\,\mathrm{d}v-\int_{S_F} F_i u_i\,\mathrm{d}s+\frac{\alpha}{2}\int_{V_m}(\dot{\varepsilon}_v)^2\,\mathrm{d}v, \tag{10}$$

又已知式(10)中：$E(\dot{\varepsilon}_{ij})=\int_0^{\bar{v}}\sigma\,\mathrm{d}\dot{\varepsilon}=\sigma\dot{\varepsilon}$ 为塑性变形功率函数.

等效应变速率 $\bar{\varepsilon}=\sqrt{U^T B^T D B U}=\sqrt{U^T P U}$，其中：$U$ 为单元节点速度矩阵，B 为几何矩阵，D 为常数矩阵，$P=B^T D B$.

体积应变速率 $\dot{\varepsilon}_V=\dot{\varepsilon}_{ij}=\dot{\varepsilon}^T C=U^T B^T C$，式中：$C$ 为变形类型列向量. $C=(1110)^T$(轴对称问题)，$C=(1100)^T$(平面问题)，$C=(111000)^T$(三维问题).

将上述公式代入泛函(10)，有

$$\prod{}^e=\int_{V_m}\sigma\sqrt{U_m^T P U_m}\,\mathrm{d}v+\frac{\alpha}{2}\int_{V_m}(U_m^T B^T C)^2\,\mathrm{d}v-\int_{S_F} F_i u_i\,\mathrm{d}s, \tag{11}$$

对式(11)求变分，有：

$$\delta U_m^T\left\{\int_{V_m}\frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}}PU_m\,\mathrm{d}v+\alpha\int_{V_m}(B^T C)^T U_m B^T C\,\mathrm{d}v-\int_{S_F}[N]^T F\,\mathrm{d}s\right\}=\{0\}, \tag{12}$$

式(12)中：$[N]$ 为形函数矩阵.

由于 δU_m^T 的任意性，有：

$$\left\{\int_{V_m}\frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}}PU_m\,\mathrm{d}v+\alpha\int_{V_m}(B^T C)^T U_m B^T C\,\mathrm{d}v-\int_{S_F}[N]^T F\,\mathrm{d}s\right\}=\{0\}. \tag{13}$$

集合所有单元速度求解方程(13)，可得总体速度求解方程：

$$\Phi(U)=\sum_{m=1}^{M}\left(\int_{V_m}\frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}}PU_m\,\mathrm{d}v+\alpha\int_{V_m}(B^T C)^T U_m B^T C\,\mathrm{d}v-\int_{S_F}[N]^T F\,\mathrm{d}s\right)=(0). \tag{14}$$

3.2 Newton-Raphson 迭代法

式(14)为关于节点速度的非线性方程组.为了避免求解非线性方程组的麻烦,一般采用摄动法线性化,然后采用 Newton-Raphson 迭代法求解.设第 n 次迭代结果为第 $n-1$ 次计算结果与修正量之和,即 $U_n=U_{n-1}+\Delta U_n$.

将上式代入式(14)中,并在 U_{n-1} 处进行展开,忽略 ΔU_n 的二次以上的项,有:

$$\Phi(U)\mid_{n-1}=-\left.\frac{\partial\Phi(U)}{\partial U}\right|_{n-1}\Delta U_n, \tag{15}$$

令 $[f]=\Phi(U)\mid_{n-1}$, $[K]=-\left.\frac{\partial\Phi(U)}{\partial U}\right|_{n-1}$, 则有

$$[K]\Delta U_n=[f]. \tag{16}$$

具体的,

$$\begin{aligned}[K]=&\int_V \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}}P\,\mathrm{d}v+\\&\int_V\left(\frac{1}{\dot{\varepsilon}}\frac{\partial\sigma}{\partial\dot{\varepsilon}}-\frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}^2}\right)\frac{1}{\dot{\varepsilon}}PU_{n-1}U_{n-1}^{T}P\,\mathrm{d}v+\\&\frac{\alpha}{2}\int_V B^TC(B^TC)^T\mathrm{d}v,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}[f]=&-\int_V\frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}}U_{n-1}\mathrm{d}v-\\&\alpha\int_V(B^TC)^TU_{n-1}B^TC\,\mathrm{d}v+\\&\int_{S_F}[N]^TF\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{18}$$

式(16)即为一般有限元法的通用求解列式,$[K]$即为刚度矩阵,$[f]$为节点力矢量残差.

将课题前期得出的本构模型——公式(8)代入上述式(17)和(18)中,整理得到刚粘塑性有限元的求解列式为:$[K]\Delta U_n=[f]$,式中:

$$\begin{aligned}[K]=&\sigma\int_V\frac{1}{\dot{\varepsilon}}\left(P+\frac{m-1}{\dot{\varepsilon}^2}PUU^TP\right)\mathrm{d}v+\\&\alpha\int_V B^TC(B^TC)^T\mathrm{d}v,\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}[f]=&-\int_V\frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}}U\mathrm{d}v-\alpha\int_V(B^TC)^TUB^TC\,\mathrm{d}v+\\&\int_{S_F}[N]^TF\,\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{20}$$

4 结 论

(1)对 Al 合金高温塑性变形时的本构方程整理之后,使参数 n,m 具有了物理意义:分别视为应变硬化指数和变形速率敏感指数,且二者均与温度 T 有关.

(2)推导出刚粘塑性有限元求解列式,其结果与一般有限元的通用公式完全一致.

参考文献:

[1] Altan T, Oh S, Gegel H L. Metal Forming: Fundamentals and Applications[M]. OH USA: ASM Matels Park, 1983:55-71.

[2] 刘心宇,张继忠.纯铝(L_2)高温本构方程的研究[J].中南工业大学学报,1997,4(2):156-159.

[3] 阿尔坦 T. 现代锻造:设备、材料和工艺[M]. 陆索,译.北京:国防工业出版社,1983:143-151.

[4] Lenard J G. Modelling Hot Deformation of Steels[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989: 101-115.

[5] 徐伟力,李雪春. 刚塑性有限元法中的罚因子的选取[J]. 哈尔滨工业大学学报, 1999,31(6):128-132.

[6] 林立杰. 铝合金高温压缩变形规律研究[D]. 赣州:南方冶金学院硕士学位论文,2001.

[7] 杨玉英,徐伟力,金朝海,等.几种典型件成型过程的弹塑性有限元数值模拟[J].塑性工程学报, 1999,6(4):22-25.

The deduction of the calculation formulas for rigid-viscoplastic FEM based on penalty-function method and previous constitutive model

LI Yong, ZHU Ying-lu

(*Institute of Material and Chemical Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China*)

Abstract: The constitutive models of four kinds Al alloys (LF6, LC4, LD5, LY12) at high temperature were acquired in the previous study. These equations are cited and adapted in this paper. Based on the previous models and penalty-function method, the author deduced the calculation formulas for rigid-viscoplastic FEM. These formulas will be the basis of future numerical simulation.

Key words: penalty-function method; constitutive model; rigid-viscoplastic; FEM