第15卷 第1期 广 东 有 色 金 属 学 报 Vol.15, No.1
2005年3月 JOURNAL OF GUANGDONG NON-FERROUS METALS Mar 2005

文章编号:1003-7837(2005)01-0061-04

方程逻辑 Institution 理论及其性质*

刘 富 春

(广东工业大学应用数学学院,广东 广州 510090)

摘 要:在方程逻辑中,通过引入语句函子 Eqn :Sign→Set 和模型函子 Alg :Sign→Cat^{op},得到了方程逻辑可满足性条件定理,从而建立了方程逻辑 Institution 理论,并进一步讨论了它的一些性质,得到了自由理论态射的复合也是自由理论态射等结论.

关键词:程序规程;抽象模型论;方程逻辑可满足性条件;范畴论

中图分类号:TP301 ;O141 文献标识码:A

Institution 作为一般框架下的逻辑系统,在数据库理论、程序设计语言、模块化技术和人工智能等方面有着重要的应用. Goguen J. A. 和 Burstall R. M. 为了给说明语言 Clear 提供合理的语义[1],建立了一种适用于程序规范说明的抽象模型论——Institution 理论[2]. 它在模块化技术和大规模程序设计中有很大的实用价值[3~6]. 另一方面,方程逻辑(多类型代数)作为泛代数的重要部分,也广泛应用于计算机形式语义中[5]. 本文在文献[3,4]工作的基础上,针对方程逻辑,通过引入语句函子 Eqn :Sign→Set 和模型函子 Alg :Sign→Cat^{op},得到了方程逻辑可满足性条件定理,继而建立了方程逻辑 Institution. 最后,进一步讨论了它的一些性质.

1 基本概念

定义1[2] 一个 Institution 由下列四部分组成:标识范畴 Sign ;语句函子 Sen :Sign→Set ;模型函子 Mod :Sign→Cat^{op}以及对每个标识 Σ,Σ-满足关系$\Rightarrow$. 其中 Σ-满足关系$\Rightarrow$必须满足以下条件:对每个标识态射 $\varphi:\Sigma\to\Sigma'$,Σ'-模型 m'和 Σ-语句 e 都有

$$m'\Rightarrow\varphi(e) \quad 当且仅当 \quad \varphi(m')\Rightarrow e$$

成立(称为可满足性条件).

定义2 设 S 是数据类型集,Σ 是 $S^*\times S$ 标号的算子集,称有序对 $<S,\Sigma>$ 为方程标识. 对于 $<S,\Sigma>$和$<S',\Sigma'>$,如果存在两个映射 $f:S\to S'$和 $g:\Sigma\to\Sigma'$,则称 $<f,g>$ 为从 $<S,\Sigma>$ 到 $<S',\Sigma'>$的方程标识态射. 记为 $\varphi=<f,g>$.

以方程标识为对象,以方程标识态射为态射,所构成的范畴称为方程标识范畴. 记为 Sign.

定义3 设 $<S,\Sigma>$ 是一个方程标识,$<A,\alpha>$和$<A',\alpha'>$是两个 Σ-代数. 如果存在映射 $h:A\to A'$使得对任意 $\sigma\in\Sigma_{u,s}$ 和任意 $a=<a_1,\cdots,a_n>\in A_u$都有

$$h_s(\alpha(\sigma))(a_1,\cdots,a_n)=\alpha'(\sigma)(h_{s1}(a_1),\cdots,h_{sn}(a_n))$$

成立,则称 h 为从$<A,\alpha>$到$<A',\alpha'>$的 Σ-同态.

以 Σ-代数为对象,以 Σ-同态为态射,所构成的范畴称为 Σ-代数范畴. 记为 Alg_Σ.

定义4 函子 Alg :Sign→Cat^{op}是指对每个 $\Sigma\in$ Sign,有 $Alg(\Sigma)=Alg_\Sigma$,且对每个态射 $\varphi=<f:S\to S',g:\Sigma\to\Sigma'>$,有 $Alg(\varphi):Alg_{\Sigma'}\to Alg_\Sigma$ 满足

(1) $Alg(\varphi)(<A',\alpha'>)=<A,\alpha>$,其中 $A_s=A_{f(S)}$,$\alpha=g;\alpha'$.

(2) $Alg(\varphi)(h')=h:Alg(\varphi)(A')\to Alg(\varphi)(B')$,其中 $h':A'\to B'$是一个 Σ'-同态且 $h_s=$

收稿日期:2004-12-08

*基金项目:广东省自然科学基金项目(020146,031541);广东工业大学青年基金项目(042027)

作者简介:刘富春(1971-),男,江西赣县人,讲师,硕士.

$h'_{f(s)}$.

为方便起见，$\mathrm{Alg}(\varphi)(A')$和 $\mathrm{Alg}(\varphi)(h')$分别简记为 $\varphi(A')$和 $\varphi(h')$.

定义5 设 X 是一个变元集，$T_\Sigma(X)$为 X 上的项的集合，$t_1, t_2 \in T_\Sigma(X)$，如果 t_1, t_2 具有相同的类型，则称三元有序对$< X, t_1, t_2 >$为一个方程 e，记为 $e = (X)\, t_1 = t_2$.

定义6 一个 Σ－代数 A 满足一个方程 $e = (X)\, t_1 = t_2$ 是指对任一个指派 $a: X \to A$ 都有 $a^{\#}(t_1) = a^{\#}(t_2)$. 记为 $A \Rightarrow e$.

引理 设 X 是变元集，则 $T_\Sigma(X)$是初始元，即对于指派 a，存在唯一的同态 $a^{\#}: T_\Sigma(X) \to A$，使得 $a = i;a^{\#}$. 这里 $i: X \to T_\Sigma(X)$是包含映射(见图1).

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr] & A \\
& T_\Sigma(X) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

图1 初始元 $T_\Sigma(X)$直观图

Fig.1 Visual figure for initial elements $T_\Sigma(X)$

定义7 函子 $\mathrm{Eqn}: \mathrm{Sign} \to \mathrm{Set}$ 是指对每个 $\Sigma \in \mathrm{Sign}$，$\mathrm{Eqn}(\Sigma)$表示所有 Σ－方程的集合，对每个态射 $\varphi = < f: S \to S', g: \Sigma \to \Sigma' >$ 有 $\mathrm{Eqn}(\varphi): \mathrm{Eqn}(\Sigma) \to \mathrm{Eqn}(\Sigma')$满足

$$\mathrm{Eqn}(\varphi)(< X, t_1, t_2 >) = < X;f, j^{\#}(t_1), j^{\#}(t_2) >.$$ (这里 $j^{\#}$的定义见定理1).

为方便起见，$\mathrm{Eqn}(\varphi)(e)$简记为 $\varphi(e)$.

2 定理及其证明

定理1 设 $\varphi = < f: S \to S', g: \Sigma \to \Sigma' >$是一个标识态射，$X$ 是一个变元集，$T_{\Sigma'}(X')$是 $X' = X;f$ 上的项的集合，则存在唯一 Σ－同态 $j^{\#}: T_\Sigma(X) \to \varphi(T_{\Sigma'}(X'))$，使得 $j = i;j^{\#}$. 其中 $j: X \to \varphi(T_{\Sigma'}(X'))$.

证明 设 $\chi \in X_s$，则 $\chi \in X'_{f(s)}$且 $T_{\Sigma'}(X')_{f(s)} = \varphi(T_{\Sigma'}(X'))_s$. 而 $X'_{f(s)}$是 $T_{\Sigma'}(X')_{f(s)}$的子集. 因此 $j: X \to \varphi(T_{\Sigma'}(X'))$是一个包含映射. 再由文献[2]知，$T_\Sigma(X)$是初始元，从而对于 j，存在唯一的 Σ－同态 $j^{\#}: T_\Sigma(X) \to \varphi(T_{\Sigma'}(X'))$，使得 $j = i;j^{\#}$.

定理2 设 $\varphi = < f: S \to S', g: \Sigma \to \Sigma' >$是一个标识态射，$X$ 是一个变元集，则对任一指派 $a: X \to A$，存在指派 $a': X'(= X;f) \to A'$，使得对任意 $t \in T_\Sigma(X)_S$，都有

$$a^{\#}_s(t) = a'^{\#}_{f(s)}(j^{\#}_s(t)).$$ (简记为 $a^{\#} = j^{\#};a'^{\#}$).

这里 $A' = \{A'_{f(s)} \mid A_s = A'_{f(s)}, s \in S\}$.

证明 对于 $a: X \to A$，若 $s' \in f(S)$，则 $X'_{s'} = \cup\{X_S \mid f(S) = s'\}$，否则 $X'_{s'} = \varnothing$(空集). 因此定义 $a': X' \to A'$如下：若 $s' \in f(S)$，则 $a'_{s'} = a_s$，否则 $a'_{s'} = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
X_s \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr] & & A_s = A'_{f(s)} \\
T_\Sigma(X) \arrow[rr] \arrow[urr] & & T_{\Sigma'}(X')_{f(s)} = \varphi(T_{\Sigma'}(X'))_s \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

图2 $a^{\#} = j^{\#};a'^{\#}$直观图

Fig.2 Visual figure for $a^{\#} = j^{\#};a'^{\#}$

对于 $a: X \to A$ 和$a': X' \to A'$，由于 $T_\Sigma(X)$和 $T_{\Sigma'}(X')$是初始元，所以存在唯一的 Σ－同态 $a^{\#}: T_\Sigma(X) \to A$，使 $a = i;a^{\#}$ 和 Σ'－同态 $a'^{\#}: T_{\Sigma'}(X') \to A'$，使 $a' = j;a'^{\#}$.

因为 $T_{\Sigma'}(X')_{f(s)} = \varphi(T_{\Sigma'}(X'))_S$，$(s \in S)$，所以由定理1得，存在唯一的 Σ－同态 $j^{\#}: T_\Sigma(X) \to T_{\Sigma'}(X')$，使得 $j = i;j^{\#}$. 从而 $a' = j;a'^{\#} = i;j^{\#};a'^{\#}$. 由 a'定义可知，当 $s' \in f(S)$时 $a' = a$，即 $a = i;j^{\#};a'^{\#}$. 由 $a^{\#}: T_\Sigma(X) \to A$ 的唯一性得 $a^{\#} = j^{\#};a'^{\#}$.(直观图见图2).

定理3 设 $\varphi = < f: S \to S', g: \Sigma \to \Sigma' >$是一个标识态射，$X$ 是一个变元集，$X' = X;f$，则对任一指派 $a': X' \to A'$，存在指派 $a: X \to A$，使得对任意 $t \in T_\Sigma(X)_S$，都有 $a^{\#}_s(t) = a'^{\#}_{f(s)}(j^{\#}_s(t))$.(简记为 $a^{\#} = j^{\#};a'^{\#}$). 这里 $A' = \{A'_{f(s)} \mid A_s = A'_{f(s)}, s \in S\}$.

证明 定义 a_s 为$a'_{f(s)}$在 X_S 上的限制，类似定理2的证明方法可以证得.

定理4 (满足性条件定理)设 $\varphi = < f: S \to S', g: \Sigma \to \Sigma' >$是一个标识态射，$e = (X)\, t_1 = t_2$ 是一个 Σ－方程，A'是一个Σ'－代数，则有下面式子成立：

$$A' \Rightarrow \varphi(e) \quad \text{当且仅当} \quad \varphi(A') \Rightarrow e.$$

证明 (必要性)设 $A' \Rightarrow \varphi(e)$，对任一指派 $a: X \to A$，由定理2，存在指派 $a': X' \to A'$，使得 $a^{\#} = j^{\#};a'^{\#}$，而由定义5及 $A' \Rightarrow \varphi(e)$得

$a'^{\#}(j^{\#}(t_1)) = a'^{\#}(j^{\#}(t_2))$，即 $a^{\#}(t_1) =$

$a^{\#}(t_2)$.

从而 $\varphi(A')\Rightarrow e$.

（充分性）设 $\varphi(A')\Rightarrow e$，对任一指派 $a':X'\to A'$，由定理3，存在指派 $a:X\to A$，使得 $a^{\#}=j^{\#};a'^{\#}$. 而由定义5及 $\varphi(A')\Rightarrow e$ 得 $a^{\#}(t_1)=a^{\#}(t_2)$，即

$$a'^{\#}(j^{\#}(t_1))=a'^{\#}(j^{\#}(t_2)),$$

从而 $A'\Rightarrow\varphi(e)$.

由此我们就可以得到一个 Institution.

定理5　由下列可以组成一个 Institution：

(1)方程标识范畴 Sign(定义2)；

(2)语句函子 Eqn：Sign→Set(定义7)；

(3)模型函子 Alg：Sign→Cat^{op}(定义4)；

(4)对每个方程标识 $\Sigma\in$ Sign，Σ－满足关系⇒(定理4).

我们称这个 Institution 为方程逻辑 Institution.

下面我们讨论方程逻辑 Institution 的一些性质.

定理6　设 $\mathscr{I}$ 是方程逻辑 Institution，如果 $\varphi_1:E_1\to E_2$，$\varphi_2:E_2\to E_3$ 都是自由理论态射，那么它们的复合 $\varphi_1;\varphi_2:E_1\to E_3$ 也是自由理论态射.

证明　由于 φ_1 是自由理论态射，所以对任意 E_1－代数 A_1，存在沿 φ_1 的自由扩张 $A_2\in\mathrm{Alg}(E_2)$，使得 $\eta_1:A_1\to\varphi_1^*(A_2)$ 具有 φ_1^* 泛性. 由于 φ_2 是自由理论态射，所以对 E_2－代数 A_2，存在沿 φ_2 的自由扩张 $A_3\in\mathrm{Alg}(E_3)$，使得 $\eta_2:A_2\to\varphi_2^*(A_3)$ 具有 φ_2^* 泛性.

令 $\eta=\eta_1;\varphi_1^*(\eta_2):A_1\to\varphi_1^*(\varphi_2^*(A_3))$. 对任意 E_3－代数 B 和任意态射

$$\delta:A_1\to\varphi_1^*(\varphi_2^*(B)),$$

由于 η_1 和 η_2 的泛性，存在态射 $\varepsilon:A_3\to B$，使得

$$\delta=\eta_1;\varphi_1^*(\varphi_2^*(\varepsilon)).$$

根据 η_1 的 φ_1^* 泛性和 η_2 的 φ_2^* 泛性，得到这样的态射 ε 是唯一的，因此

$$\eta:A_1\to\varphi_1^*(\varphi_2^*(A_3))$$

具有 $\varphi_2^*;\varphi_1^*$ 泛性，也即 $\varphi_1;\varphi_2:E_1\to E_3$ 是自由理论态射.

定理7　设 $\mathscr{I}$ 是方程逻辑 Institution，如果 $\varphi:E_1\to E_2$ 是自由理论态射，那么下列条件等价：

(1)每个 E_2－代数 A_2 都是 φ－自由的；

(2)函子 $\varphi^s:E_1^*\to E_2^*$ 是可延拓的[2]，且 φ^s 在对象上是同构满射.

证明　因为 $\varphi:E_1\to E_2$ 是自由理论态射，对任意 E_1－代数 A_1，存在沿 φ 的自由扩张 $A_2\in\mathrm{Alg}(E_2)$，使得 $\eta_1:A_1\to\varphi^*(A_2)$ 具有 φ_1^* 泛性. 如果(1)成立，则 $\varphi^s(\varphi^*(A_2))\to A_2$ 是一个同构. 因此函子 $\varphi^s:E_1^*\to E_2^*$ 是可延拓的[2]. 对任意 E_2－代数 B，由(1)得，$\varphi^*(B)$ 存在沿 φ 的自由扩张 $\varphi^s(\varphi^*(B))$，使得 $\varphi^s(\varphi^*(B))\to A_2$ 是一个同构，从而 φ^s 在对象上是同构满射，即(2)成立.

反之，如果(2)成立，则对每个 E_2－代数 A_2，由于 φ^s 在对象上是同构满射，所以存在 E_1－代数 A_1，使得 $\varphi^s(A_1)$ 与 A_2 同构. 又因为 $\varphi^s:E_1^*\to E_2^*$ 是可延拓的，所以 $\varphi^s(A_1)$ 是 φ－自由的，也即 A_2 是 φ－自由的，即(1)成立.

3　结束语

Institution 理论是一种适用于程序规范说明的抽象模型论，在模块化技术和大规模程序设计中有着广泛的应用. 本文主要在方程逻辑中，通过引入语句函子 Eqn：Sign→Set 和模型函子 Alg：Sign→Cat^{op}，得到了方程逻辑可满足性条件定理，从而建立了方程逻辑 Institution 理论，并进一步讨论了它的一些性质，得到了自由理论态射的复合也是自由理论态射等结论. 方程逻辑 Institution 理论的建立，为计算机形式语义中多类型代数方面的研究提供了一种新的方法. 关于它的遗忘函子 Sign：Th→Sign 是否反射余极限以及 Institution 范畴的完备性，还有待于进一步研究.

参考文献：

[1] Burstall R M. The semantics of Clear, a specification language[A]. Proceedings of the 1979 Copenhagen Winter School on Abstract Software Specification. Lecture Notes in Computer Science 86[C]. Berlin: Springer－Verlag, 1980. 292－332.

[2] Goguen J A, Burstall R M. Institutions: abstract mode theory for specification and programming[J]. Journal of the Association for Computing Machinery, 1992, 39(1): 95－146.

[3] 应明生. Institution 中自由理论态射的合成[J]. 软件学报, 1997, 8(8): 636－640.

[4] 刘富春. Institution 中自由合并理论的初始与终结语义[J]. 软件学报, 1999, 2(2): 197－200.

[5] 陆汝钤. 计算机语言的形式语义[M]. 北京: 科学出版社, 1992.

[6] Diaconescu R, Goguen J, Stefaneas P. Logical support for modularization[A]. Logical Environments[C]. Cam-

bridge: Cambridge University Press, 1993. 83-130.

Institution of equational logic and its properties

LIU Fu-chun

(*Faculty of Applied Mathematics*, *Guangdong University of Technology*, *Guangzhou* 510090, *China*)

Abstract: Institution is a kind of formalized logical system which has been widely applied in database theory, programming languages, modularized program and artificial intelligence. The theorem of satisfaction condition is skillfully proved by introducing a sentence functor Eqn $: \mathrm{Sign} \to \mathrm{Set}$ and a model functor Alg $: \mathrm{Sign} \to \mathrm{Cat}^{op}$ in equational logic. Consequently, the Institution of equational logic is established. Eventually, some properties in Institution of equational logic are discussed. For example, the conclusion of the composite of liberal theory morphisms being still liberal is drawn.

Key words: programming specification; abstract model theory; satisfaction condition; category theory